

02-01 Activité

Soient p et q deux nombres réels. Soit f la fonction qui, à tout réel x , associe $x^3 + px + q$.

1. a] Étudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.
b] Justifier qu'il existe au moins un réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Soit l'équation (E) : $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$. Soient X_1 et X_2 les deux solutions de (E), lorsqu'elles existent.
a] Exprimer le produit X_1X_2 en fonction de p et q .
b] Exprimer la somme $X_1 + X_2$ en fonction de p et q .

Jérôme Cardan (1501-1576) : mathématicien, philosophe, astrologue et médecin italien.

Inventeur du joint de cardan qui transmet un mouvement de rotation entre deux arbres dont les axes ne sont pas alignés.



En 1545, en étudiant les équations polynomiales de degré 3, il écrit :

« La somme des racines cubiques des solutions de $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$ est solution de $x^3 + px + q = 0$. »

3. a] Pour tout couple de réels $(a ; b)$, développer et réduire $(a + b)^3$.
b] Vérifier l'affirmation de Cardan lorsque X_1 et X_2 existent.
4. a] À l'aide d'une calculatrice graphique, lire une valeur approchée au centième de la valeur x_0 pour laquelle la fonction $f(x) = x^3 - 2x - 3$ s'annule.
b] Déterminer sa valeur exacte.
5. a] À l'aide d'une calculatrice graphique, déterminer les approximations au centième des valeurs pour lesquelles la fonction $f(x) = x^3 - 15x - 4$ s'annule.
b] Essayer d'appliquer la technique de Cardan.

Raphaël Bombelli (1526-1572) était un mathématicien et ingénieur italien.

Il étudie particulièrement l'assèchement des marécages.

En 1560, reprenant l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$, il se donne le droit d'écrire $\sqrt{-1}$.



- c] En admettant provisoirement l'existence de $\sqrt{-1}$, développer $(2 + \sqrt{-1})^3$ et $(2 - \sqrt{-1})^3$.
- d] En déduire la somme des racines cubiques des solutions de l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$.
- e] Cette valeur est-elle cohérente avec l'un des résultats de la question 5a] ?

02 Les nombres complexes

02-01 Un nouveau type de nombre

Définitions et notations

On admet qu'il existe des nombres non réels.

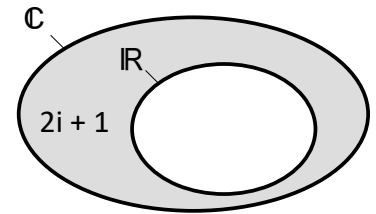
On les nomme **nombres imaginaires**.

On appelle **i le nombre imaginaire dont le carré vaut (-1)**.

Tout nombre de la forme ai (avec $a \in \mathbb{R}^*$) est **imaginaire pur**. Leur ensemble se note $i\mathbb{R}$.

Tout nombre de la forme $ai + b$ (avec $(a ; b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$) est **imaginaire**. Cet ensemble est sans notation.

L'union des nombres réels et imaginaires est l'ensemble des **nombres complexes**. Il se note $\mathbb{C}$.



Remarques

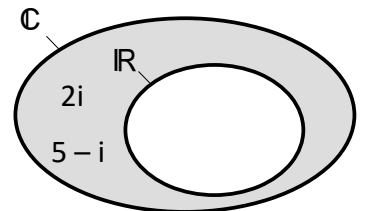
- Les nombres complexes n'ont pas de signe. On ne peut pas les ordonner.
- On rejette l'écriture $\sqrt{-1}$ par souci de cohérence avec les règles de calcul concernant les racines carrées. En effet, selon la façon dont on effectue le calcul, $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ vaut (-1) ou 1, ce qui n'est pas acceptable.

Définitions et notations

Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = x + iy$ avec x et y des réels.

Il s'agit de la **forme algébrique** de z .

- x est la **partie réelle** de z , notée $\text{Re}(z)$
- y est la **partie imaginaire** de z , notée $\text{Im}(z)$



Remarque

Un nombre est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Un nombre est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Propriétés

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires coïncident.

De plus, on étend à l'ensemble $\mathbb{C}$ toutes les règles de calcul en usage dans l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemples

$$4i(3 + i) = -4 + 12i \quad \left| \quad (5 + 2i)^2 = 21 + 20i \quad \left| \quad (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \quad \left| \quad \frac{1}{i} = -i \right. \right.$$

02-01 Applications du cours**Application 1**

Dans chaque cas, écrire le nombre complexe z sous sa forme algébrique.

a] $z = (5 - i)(1 - 2i)(3 + 2i)$

b] $z = i^6$

c] $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$

Application 2

On note $j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. a] Écrire j^2 sous sa forme algébrique.

b] Écrire j^3 sous sa forme algébrique.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Discuter la forme algébrique de j^k .

Application 3

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on considère $P(z) = z^2 - i$.

1. a] Exprimer $\operatorname{Re}(P(z))$ en fonction de x et y .

b] Exprimer $\operatorname{Im}(P(z))$ en fonction de x et y .

2. Écrire la forme algébrique de $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Application 4

Déterminer la forme algébrique de $\sum_{k=0}^{2025} i^k$.

Application 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z + i = iz$.

Application 6

a , b et c sont des nombres complexes.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système :
$$\begin{cases} i\sqrt{2} + a + 2c = 2 + b \\ a + b + c = 6 \\ 2a + 2c = b + 3 \end{cases}$$